

Laguerre 基下单变量多项式的子结式

旷丽容 刘兰兰 *

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院 贵州省贵阳市 550000

摘要: 本文研究了 Laguerre 基下单变量多项式的子结式, 提出了 Laguerre 基下关于 x 的 k 阶子结式的构造方法. 将标准基下的子结式理论推广至 Laguerre 基并且利用过渡矩阵建立标准基和 Laguerre 之间的联系, 再应用标准基下的 k 阶子结式表达式证明了 Laguerre 基下所构造矩阵的行列式与子结式多项式的等价关系.

关键词: 多项式; Laguerre 基; 子结式

引言

在多项式代数理论中, 结式和子结式是研究多项式公共根、计算最大公因式及研究代数方程组解结构的重要工具 [1-4]. 十八世纪末 Bézout 提出用消去法判定多项式组公共根的存在性问题, 奠定了结式的理论基础 [5]. Sylvester (1853) 提出通过构造 Sylvester 矩阵的行列式来定义结式, 将多项式公共根的判定问题转化为行列式计算, 即若两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的结式 $R(f, g) = 0$, 则 f 和 g 在代数闭域中存在公共根, 这一判定方法避免了逐次消元的复杂性, 为公共根的存在性提供了代数判定工具. 1948 年, Habicht 建立了标准基下多项式结式递推的计算框架, 为符号计算提供了高效算法. 后续人们在此基础上对结式及子结式理论进行了逐步完善.

近年来, 人们开始关注不同多项式基下直接处理多项式代数的问题以及怎样避免转换到标准基时可能出现的数值不稳定问题. Laguerre 基作为一种重要的正交多项式基, 在数值分析、逼近理论和量子力学等领域有广泛应用 [8-9], 本文旨在研究 Laguerre 基下单变量多项式的子结式表达式, 为进一步研究 Laguerre 基下多项式组的公共根问题和其他相关应用奠定理论基础.

1. 预备知识

本文主要研究单变量多项式的子结式在 Laguerre 基下的表示. 本节首先对广义 Laguerre 基、两个单变量多项式的子结式的定义进行回顾.

Laguerre 多项式是一类经典的正交多项式, 满足:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0.$$

基金项目: 贵州民族大学校级项目 (GZMUZK[2023] YB10); 贵州省高等学校大数据分析 & 智能计算重点实验室 (黔教技 [2023]012 号).

作者简介: 旷丽容 (2000-), 女, 贵州铜仁人, 硕士研究生, 研究方向: 数值代数.

通信作者: 刘兰兰 (1982-), 女, 湖北宜城人, 副教授, 博士, 研究方向: 数值代数和矩阵分析.

该方程可通过展开级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 进行求解 [10]. 而广义

Laguerre 多项式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ 满足更一般的微分方程:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dy}{dx} + n y(x) = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}), y(x) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

设 $\alpha > -1$, 经典 Laguerre 多项式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上关于函数 $x^\alpha e^{-x}$ 正交. 其正交关系为:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \cdot L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \cdot \delta_{mn}.$$

广义 Laguerre 多项式的生成函数为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{x t}{1-t}}.$$

从生成函数可以得到 Laguerre 多项式的显式表达式 [11]:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-i \end{pmatrix} \cdot x^i.$$

当 $\alpha = 0$ 时, (3) 式退化为标准 Laguerre 多项式 $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$, 且恒有 $L_0^{(0)}(x) = L_0(x) = 1$.

设 $F, G \in \mathbb{F}[x]$ 是 Laguerre 基下的一组多项式, 它们的次数分别为 n, m ($n \geq m$), $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 F 的 n 个根, 即

$$F(x) = f_n L_n^{(\alpha)}(x) + f_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + \dots + f_0 L_0^{(\alpha)}(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$G(x) = g_m L_m^{(\alpha)}(x) + g_{m-1} L_{m-1}^{(\alpha)}(x) + \dots + g_0 L_0^{(\alpha)}(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0.$$

定义 1 (子结式) ^[12] 给定形如 (4) 式的两个多项式 $F, G \in \mathbb{F}[x]$, 定义多项式 F, G 关于 x 的 k 阶子结式为

$$S_k := (-1)^k a_n^{m-k} \cdot \frac{\det M}{\det V}.$$

其中 S_k 中 x^k 的系数记为 s_k , 且

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 G(\alpha_1) & \dots & \alpha_n^0 G(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-k-1} G(\alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-k-1} G(\alpha_n) \\ \alpha_1^0 & \dots & \alpha_n^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^k & \dots & \alpha_n^k \\ & & x^0 \\ & & \vdots \\ & & x^k \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \alpha_n^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

针对 (5) 所示的表达式 S_k , 应先将 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 视为不定元而不是直接代入 F 的根, 执行表达式中的精确除法, 得到一个关于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的对称多项式, 再将 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 赋值为 F 的根, 对上述对称多项式进行求值. 这一处理方式确保了表达式在 F 有重根时仍能有效计算, 避免了此时直接代入根导致的分母为零的问题.

命题 1 ^[12] 对于多项式 $F, G \in \mathbb{F}[x]$, 以下两个条件等价:

- (1) F 和 G 的最大公因式的次数为 k (即 $\deg \gcd(F, G) = k$);
- (2) 前 k 个子结式中, 前 $k-1$ 个均为零, 且第 k 个非零 (即 $s_0 = \dots = s_{k-1} = 0$ 且 $s_k \neq 0$).

进一步地, 若 $\deg \gcd(F, G) = k$, 则 F 与 G 的最大公因式恰好等于 k 次子结式多项式 S_k , 即 $\gcd(F, G) = S_k$.

2. 主要定理

本节将给出本文的主要定理, 通过过渡矩阵建立标准

基和 Laguerre 基的联系, 接着利用定义 1 将标准基下的子结式理论推广到 Laguerre 基下的 k 阶子结式.

定理 1 给定形如 (4) 式的 Laguerre 基下的两个多项式 $F, G \in \mathbb{F}[x]$, 则

$$S_k := (-1)^{k+mn} \cdot c' \cdot \frac{\det N}{\det L^{(\beta)}}.$$

其中

$$c' = \frac{\prod_{j=0}^{n-k-1} j!}{\prod_{i=k+1}^{n-1} i!} \cdot \left(\frac{f_n}{n!} \right)^{m-k},$$

$$N = \begin{pmatrix} L_0^{(\beta)}(\alpha_1) G(\alpha_1) & \dots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n) G(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1) G(\alpha_1) & \dots & L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n) G(\alpha_n) \\ L_0^{(\beta)}(\alpha_1) & \dots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n) & L_0^{(\beta)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_k^{(\beta)}(\alpha_1) & \dots & L_k^{(\beta)}(\alpha_n) & L_k^{(\beta)}(x) \end{pmatrix},$$

$$L^{(\beta)} = \begin{pmatrix} L_0^{(\beta)}(\alpha_1) & \dots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_1) & \dots & L_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \end{pmatrix}.$$

证明 通过分别证明 (5) 式和 (6) 式分子分母的等价性来证明本文主要定理.

设 T 是 $\tilde{x}_{n-1} = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})^T$ 到 $\tilde{L}_{n-1}^{(\beta)} = (L_0^{(\beta)}(x), L_1^{(\beta)}(x), L_2^{(\beta)}(x), \dots, L_{n-1}^{(\beta)}(x))^T$ 的过渡矩阵, 则对 $i = 1, \dots, n$ 满足 $\tilde{L}_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_i) = T \cdot \tilde{x}(\alpha_i)$, 由广义 Laguerre 基的显示表达式的定义有,

$$T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \beta - \alpha_i \\ \left(\frac{2+\beta}{2} + \frac{(-1)^1}{1!} \cdot \frac{(2+\beta)}{1} \right) \cdot x + \frac{(-1)^2}{2!} \cdot \frac{(2+\beta)}{0} \cdot x^2 \\ \left(\frac{3+\beta}{3} + \frac{(-1)^1}{1!} \cdot \frac{(3+\beta)}{2} \right) \cdot x + \frac{(-1)^2}{2!} \cdot \frac{(3+\beta)}{1} \cdot x^2 + \frac{(-1)^3}{3!} \cdot \frac{(3+\beta)}{0} \cdot x^3 \\ \vdots \\ \left(\frac{n-1+\beta}{n-1} + \frac{(-1)^1}{1!} \cdot \frac{(n-1+\beta)}{n-2} \right) \cdot x + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1+\beta)}{0} \cdot x^{n-1} \end{pmatrix}.$$

从而,

$$T = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^0}{0!} \binom{\beta}{0} & & & \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1+\beta}{1} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{1+\beta}{0} & & \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{2+\beta}{2} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{2+\beta}{1} & \frac{(-1)^2}{2!} \binom{2+\beta}{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{n-1+\beta}{n-1} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{n-1+\beta}{n-2} & \frac{(-1)^2}{2!} \binom{n-1+\beta}{n-3} & \dots \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \binom{n-1+\beta}{0} \end{pmatrix}$$

则有 $\tilde{x}(\alpha_i) = T^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_i)$, 其中,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ * & (-1)^1 \cdot 1! & & \\ * & * & (-1)^2 \cdot 2! & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ * & * & * & \dots (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \end{pmatrix}.$$

接下来我们首先考虑定义 1 中的分母, 由定义 1 及过渡矩阵可得,

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= (\tilde{x}(\alpha_1), \dots, \tilde{x}(\alpha_n)) \\ &= (T^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_1), \dots, T^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_n)) \\ &= T^{-1} \cdot (\tilde{L}_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_1), \dots, \tilde{L}_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_n)) \\ &= T^{-1} \cdot L^{(\beta)}(\alpha). \end{aligned}$$

对等式两边同时求行列式, 由于 T^{-1} 为下三角矩阵则有,

$$|V(\alpha)| = |T^{-1} \cdot L^{(\beta)}(\alpha)| = |T^{-1}| \cdot |L^{(\beta)}(\alpha)| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} j! \cdot |L^{(\beta)}(\alpha)| = p \cdot |L^{(\beta)}(\alpha)|.$$

接着考虑定义 1 中的分子, 为了便于证明本文将 M 分为上下两块, 上块为前 $n-k$ 行, 下块为后 $k+1$ 行, 即

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}.$$

对 M_1 我们有,

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_{n-k-1}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1), \dots, \tilde{x}_{n-k-1}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n)) &= (T_{n-k}^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1), \dots, T_{n-k}^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n)) \\ &= T_{n-k}^{-1} \cdot (\tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1), \dots, \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n)). \end{aligned}$$

同样的对 M_2 我们有,

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_k(\alpha_1), \dots, \tilde{x}_k(\alpha_n), \tilde{x}_k) &= (T_{k+1}^{-1} \cdot \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_1), \dots, T_{k+1}^{-1} \cdot \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_n), T_{k+1}^{-1} \cdot \tilde{L}_k^{(\beta)}(x)) \\ &= T_{k+1}^{-1} \cdot (\tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_1), \dots, \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_n), \tilde{L}_k^{(\beta)}(x)). \end{aligned}$$

联立 M_1, M_2 并对等式两边同时求行列式有,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n-k-1}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1) & \dots & \tilde{x}_{n-k-1}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n) & 0 \\ \tilde{x}_k(\alpha_1) & \dots & \tilde{x}_k(\alpha_n) & \tilde{x}_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_{n-k}^{-1} \cdot (\tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1) & \dots & \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n) & 0) \\ T_{k+1}^{-1} \cdot (\tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_1) & \dots & \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_n) & \tilde{L}_k^{(\beta)}(x)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_{n-k}^{-1} & & & \\ & T_{k+1}^{-1} & & \\ & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1) & \dots & \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n) & 0 \\ \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_1) & \dots & \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_n) & \tilde{L}_k^{(\beta)}(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{vmatrix} T_{n-k}^{-1} \\ T_{k+1}^{-1} \end{vmatrix} = |T_{n-k}^{-1}| \cdot |T_{k+1}^{-1}| = (-1)^{\frac{k(k+1)+(n-k-1)(n-k)}{2}} \cdot \prod_{j_1=0}^k j_1! \cdot \prod_{j_2=0}^{n-k-1} j_2!$$

从而

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}_{n-k-1}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1) & \dots & \tilde{x}_{n-k-1}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n) & 0 \\ \tilde{x}_k(\alpha_1) & \dots & \tilde{x}_k(\alpha_n) & \tilde{x}_k \end{vmatrix} = q \cdot \begin{vmatrix} \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1) & \dots & \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n) & 0 \\ \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_1) & \dots & \tilde{L}_k^{(\beta)}(\alpha_n) & \tilde{L}_k^{(\beta)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\text{其中 } q = (-1)^{\frac{k(k+1)+(n-k-1)(n-k)}{2}} \cdot \prod_{j_1=0}^k j_1! \cdot \prod_{j_2=0}^{n-k-1} j_2!.$$

对于 Laguerre 基下最高项系数为 $\frac{1}{n!}$ 的单变量多项式 F , 其展开为标准基后最高项系数为 $\frac{1}{n!}$, 将得到的分子分母代入式 (5) 后可得式 (4) 所示的 Laguerre 基下的单变量多项式 F, G 的 k 阶子结式为,

$$\begin{aligned} S_k &:= (-1)^k \cdot \left(f_n \cdot \frac{(-1)^n}{n!} \right)^{m-k} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{\det N}{\det L^{(\beta)}} \\ &= (-1)^{(-2n+2)k+k^2+mn} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n-k-1} j!}{\prod_{i=k+1}^{n-1} i!} \cdot \left(\frac{f_n}{n!} \right)^{m-k} \cdot \frac{\det N}{\det L^{(\beta)}} \\ &= (-1)^{(-2n+2)k+k^2+mn} \cdot c' \cdot \frac{\det N}{\det L^{(\beta)}}. \end{aligned}$$

由于

$$(-2n+2)k+k^2+mn \equiv (k+mn) \pmod{2},$$

故

$$S_k := (-1)^{k+mn} \cdot c' \cdot \frac{\det N}{\det L^{(\beta)}}.$$

则定理 1 得证.

为了便于计算, 考虑对矩阵 N 的后 $k+1$ 行做行变换.

对 $i = n-k+1, n-k+2, \dots, k$, 第 i 行减去 $L_{i-1}^{(\beta)}(x)$ 倍的 r_{n-k} 行以使最后一列除第 r_{n-k} 行外其余全为 0, 即

$$N = \begin{pmatrix} L_0^{(\beta)}(\alpha_1)G(\alpha_1) & \cdots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n)G(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1)G(\alpha_1) & \cdots & L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n)G(\alpha_n) \\ L_0^{(\beta)}(\alpha_1) & \cdots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n) & L_0^{(\beta)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_k^{(\beta)}(\alpha_1) & \cdots & L_k^{(\beta)}(\alpha_n) & L_k^{(\beta)}(x) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\tau_{n-k-1}^{(\beta)}(x)\tau_{n-k}} \begin{pmatrix} \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1) \cdot G(\alpha_1) & \cdots & \tilde{L}_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \cdot G(\alpha_n) & 0 \\ L_0^{(\beta)}(\alpha_1) & \cdots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n) & L_0^{(\beta)}(x) \\ L_1^{(\beta)}(\alpha_1) - L_1^{(\beta)}(x) & \cdots & L_1^{(\beta)}(\alpha_n) - L_1^{(\beta)}(x) & 0 \\ L_2^{(\beta)}(\alpha_1) - L_2^{(\beta)}(x) & \cdots & L_2^{(\beta)}(\alpha_n) - L_2^{(\beta)}(x) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_k^{(\beta)}(\alpha_1) - L_k^{(\beta)}(x) & \cdots & L_k^{(\beta)}(\alpha_n) - L_k^{(\beta)}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

此时按最后一列展开, 则有

$$\det N = (-1)^{2n-k+1} \cdot \det \begin{pmatrix} L_0^{(\beta)}(\alpha_1)G(\alpha_1) & \cdots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n)G(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1)G(\alpha_1) & \cdots & L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n)G(\alpha_n) \\ L_1^{(\beta)}(\alpha_1) - L_1^{(\beta)}(x) & \cdots & L_1^{(\beta)}(\alpha_n) - L_1^{(\beta)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k^{(\beta)}(\alpha_1) - L_k^{(\beta)}(x) & \cdots & L_k^{(\beta)}(\alpha_n) - L_k^{(\beta)}(x) \end{pmatrix}$$

将符号因子 $(-1)^{2n-k+1}$ 与式 (7) 中的符号因子 $(-1)^{(-2n+2)k+k^2+mn}$ 合并得到 $(-1)^{k^2+(-2n+1)k+(m+2)n+1}$, 由于 $k^2+(-2n+1)k+(m+2)n+1 \equiv mn+1 \pmod{2}$

从而 Laguerre 基下的单变量多项式 F, G 的 k 阶子结式的另一种形式为,

$$S_k := (-1)^{mn+1} \cdot c' \cdot \frac{\det \bar{N}}{\det L^{(\beta)}}.$$

其中 c' 和式 (6) 一致,

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} L_0^{(\beta)}(\alpha_1)G(\alpha_1) & \cdots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n)G(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_1)G(\alpha_1) & \cdots & L_{n-k-1}^{(\beta)}(\alpha_n)G(\alpha_n) \\ L_1^{(\beta)}(\alpha_1) - L_1^{(\beta)}(x) & \cdots & L_1^{(\beta)}(\alpha_n) - L_1^{(\beta)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k^{(\beta)}(\alpha_1) - L_k^{(\beta)}(x) & \cdots & L_k^{(\beta)}(\alpha_n) - L_k^{(\beta)}(x) \end{pmatrix},$$

$$L^{(\beta)} = \begin{pmatrix} L_0^{(\beta)}(\alpha_1) & \cdots & L_0^{(\beta)}(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_1) & \cdots & L_{n-1}^{(\beta)}(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

最后通过一个例子来说明定理 1 中 Laguerre 基下两个单变量多项式的子结式的计算.

例 1. 考虑两个多项式 F, G , 设 $k=1$, 给定 $\beta=1$, 其中

$$F(x) = 2L_3^{(2)}(x) + L_2^{(2)}(x) - 3L_1^{(2)}(x) + 4L_0 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 9,$$

$$G(x) = 3L_2^{(2)}(x) - 2L_1^{(2)}(x) + L_0^{(2)}(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 6.$$

且易得 F 的根为 $\alpha = \left(\frac{3}{2}, 6-3\sqrt{2}, 6+3\sqrt{2}\right)$, 则通过定义 1 计算 F 和 G 在标准基下的 k 阶子结式为

$$S_1(F) := \frac{1}{3} \times \begin{vmatrix} G\left(\frac{3}{2}\right) & G(6-3\sqrt{2}) & G(6+3\sqrt{2}) & 0 \\ \frac{3}{2} \cdot G\left(\frac{3}{2}\right) & (6-3\sqrt{2}) \cdot G(6-3\sqrt{2}) & (6+3\sqrt{2}) \cdot G(6+3\sqrt{2}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 6-3\sqrt{2} & 6+3\sqrt{2} & x \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{83}{12}x + \frac{25}{4}.$$

由于 $\deg G = 2 \equiv 0 \pmod{2}$, 且当 $\beta=1$ 时

$$L_0^{(1)}(x) = 1, L_1^{(1)}(x) = 2-x, L_2^{(1)}(x) = 3-3x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$L_1^{(1)}(\alpha) = \left[-\frac{3}{8}, -4+3\sqrt{2} \quad -4-3\sqrt{2}\right],$$

$$L_2^{(1)}(\alpha) = \left[-\frac{9}{8}, \frac{3(6-3\sqrt{2})^2}{2} - 36 + 21\sqrt{2} \quad \frac{3(6+3\sqrt{2})^2}{2} - 36 - 21\sqrt{2}\right],$$

$$G\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8}, \quad G(6-3\sqrt{2}) = \frac{3(6-3\sqrt{2})^2}{2} - 36 + 21\sqrt{2},$$

$$G(6+3\sqrt{2}) = \frac{3(6+3\sqrt{2})^2}{2} - 36 - 21\sqrt{2}.$$

则由本文的主要定理有,

$$\det N = \begin{vmatrix} -\frac{9}{8} & \frac{3(6-3\sqrt{2})^2}{2} - 36 + 21\sqrt{2} & \frac{3(6+3\sqrt{2})^2}{2} - 36 - 21\sqrt{2} & 0 \\ \frac{9}{16} & -378 + 267\sqrt{2} & -378 - 267\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -4+3\sqrt{2} & -4-3\sqrt{2} & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{27\sqrt{2}(83x-75)}{8},$$

$$\det L^{(\beta)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -4+3\sqrt{2} & -4-3\sqrt{2} \\ -\frac{3}{8} & -15+9\sqrt{2} + \frac{(6-3\sqrt{2})^2}{2} & -15-9\sqrt{2} + \frac{(6+3\sqrt{2})^2}{2} \end{vmatrix} = -\frac{27\sqrt{2}}{4},$$

从而 F 和 G 在 Laguerre 基下的 k 阶子结式为,

$$S_1(F) := (-1)^{1+3 \cdot 2} \cdot \prod_{j=0}^2 \frac{j!}{\binom{2}{j}} \cdot \left(\frac{2}{3!}\right) \times \frac{\det N}{\det L^{(\beta)}}$$

$$= (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3!}\right) \cdot \left(\frac{83}{2}x - \frac{75}{2}\right)$$

$$= -\frac{83}{12}x + \frac{25}{4}.$$

比较可知所得结果与 F 和 G 在标准基下的 k 阶子结式等价.

3. 总结

本文研究了 Laguerre 基下单变量多项式的子结式表达式. 通过将标准基下的子结式理论与 Laguerre 基下的多项式的性质相结合, 推导出了 Laguerre 基下子结式的具体表达式. 这一表达式直接在 Laguerre 基下表示, 避免了基转换带来的计算复杂性和数值不稳定性.

参考文献

- [1]ZENG Z G. Computing multiple roots of inexact polynomials [J]. Mathematics of Computation, 2005, 74(250): 869–903.
- [2]AKIRA T. Calculating approximate GCD of multiple univariate polynomials using approximate syzygies [J]. ACM Communications in Computer Algebra, 2014, 47(3/4): 110–111.
- [3]KAPUR D. SAXENA T, YANG L. Algebraic and geometric reasoning using Dixon resultants[C]//Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. 1994: 99–107.
- [4]HONG H. Subresultants under composition[J], Journal of Symbolic Computation, 1997, 23:355–365.
- [5]BEZOUT E. Th é orie g é n é rale des é quations alg é briques[M]. Ph.–D. Pierres, 1779.

[6]SYLVESTER J J. On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm’ s functions, and that of the greatest algebraical common measure[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1853, 143: 407–548.

[7]HABICHT W. Eine verallgemeinerung des sturmschen wurzelzählverfahrens[J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 1948, 21(1): 99–116.

[8]PALMA G, RAFF U. The one–dimensional hydrogen atom revisited[J]. Canadian journal of physics, 2006, 84(9): 787–800.

[9]AMBALAMPITIYA H B , Stallbaumer J , Fabrikant I I ,et al.Near–threshold collisional dynamics in the ee+p system[J]. Physical Review A, 2023, 108(3):12.

[10]ABOITES V. Laguerre polynomials and linear algebra[J]. Memorias Sociedad Matem á tica Mexicana, 2017, 52: 3–13.

[11]KOEKOEK R. Generalizations of Laguerre polynomials[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 153(2): 576–590.

[12]YANG J, YANG W. (2023). B é zout Subresultants for Univariate Polynomials in General Basis. arXiv preprint arXiv:2305.03906.

[13]HONG H, YANG J. Subresultant of several univariate polynomials[J]. arxiv: 2112.15370, 2021.