论证“孪生素数猜想”

傅国雄

东源县曾田镇中心小学　广东省河源市　517000

摘　要：“孪生素数有无穷多”至今未有公布完全证明。本文深入探讨了孪生素数的构成及分布规律，提出了独自见解。首先，通过筛除大于3奇数数列中3的倍数，得到孪生数对，再进一步筛除含合数的对，即得孪生素数。文中创新性地构建了“3x+”数列模型，包含“3x+2”与“3x+1”两个无穷等差数列，揭示了孪生素数在其中的分布特征。基于该模型，提出“类同定律”，用于估算任意足够大数值范围内的孪生素数对数，并给出了通项公式。此外，拓展讨论了将“类同定律”应用于“5x+”、“7x+”等更广泛数列的可能性，为孪生素数研究提供了新视角。

关键词：“3x+”；对号入座；“类同定律”

引言

素数，作为数论领域的基石，自古以来便吸引着无数数学家的目光。其中，孪生素数——即相差2的素数对，如（5,7）、（11,13）等，更是素数研究中的一颗璀璨明珠。“孪生素数有无穷多”这一猜想，虽历经数百年探索，至今仍未获完全证明，却激发了数学界持续的热情与创造力。本文旨在通过深入剖析孪生素数的构成机理与分布规律，尝试为这一古老猜想提供新的论证视角。我们构建了“3x+”数列模型，揭示了孪生素数在特定数列中的分布特征，并据此提出“类同定律”，为估算任意大数值范围内的孪生素数对数提供了有效工具。期望本文的研究能激发更多关于孪生素数的深入探索，推动数论领域的发展。

1. 孪生素数的由来

根据数论中的定义，孪生素数是指相差2的素数对，即形如（p，p+2）的数对，其中p与p+2均为素数。在大于3的奇数数列研究中，我们采用筛法思想，先将所有能被3整除的数（3的倍数，3本身除外）筛除，此时剩余数列中的数两两组合（Q，Q+2）即构成孪生数对。

从理论层面看，这一过程本质是对奇数序列进行质因数筛选。由于合数必然存在小于其本身的质因数，当我们将3的倍数筛除后，剩余数对虽初步具备孪生特征，但仍可能包含含其他质因数的合数对。因此需进一步筛除含5、7等更大质因数的合数对，最终保留的数对即为孪生素数。例如（5,7）、（11,13）等数对，既满足相差2的条件，又通过双重筛选确保了素数性质。

【例】（5,7），（11,13），（17,19），（23,25），（29,31），（35,37）……

如果把上行形式的所有孪生数（Q，Q+2）其中含有合数的孪生数对都筛删掉，那么剩下的就都是孪生素数（p，p+2）了。

2.“3x+”数列

上述每一孪生数对（Q，Q+2）其中的Q都是3的倍数加2的数，即Q→“3χ+2”；Q+2都是3的倍数加1的数，即Q+2→“3χ+1”。把每一孪生数对中的Q提取出来，按由小至大顺序依次排列成为首项a1=5公差d=6的“3χ+2”无穷等差数列；把每一孪生数对中Q+2按由小至大顺序排列成为首项a1=7公差d=6的“3χ+1”无穷等差数列，那么这二数列每每相对（同项）的数都是孪生数(其中包括孪生素数)。

（这二数列可统称为“3x+”数列）如下：

Q → 3x+2→95 . 101 . 107 . 113 . 119 . 125 . 131 . 137 . 143 . 149 . 155 . 161 .167
Q+2→3x+1→97 . 103 . 109 . 115 . 121 . 127 . 133 . 139 . 145 . 151 . 157 . 163 . 169 .

（1）在自然数列里，平均每两个数其中就有一个数含有质因数2；平均每三个数其中有一个数含有质因数3；平均每五个数其中有一个数含有质因数5......

（2）在奇数列里，没有含质因数2的数，平均每三个数其中仍有一个数含有质因数3；平均每五个数其中仍有一个数含有质因数5；平均每七个数其中仍有一个数含有质因数7......

（3）在“3x+1”和“3x+2”数列里，没有含质因数2的数，也没有含质因数3的数，而平均每五个数其中仍有一个数含

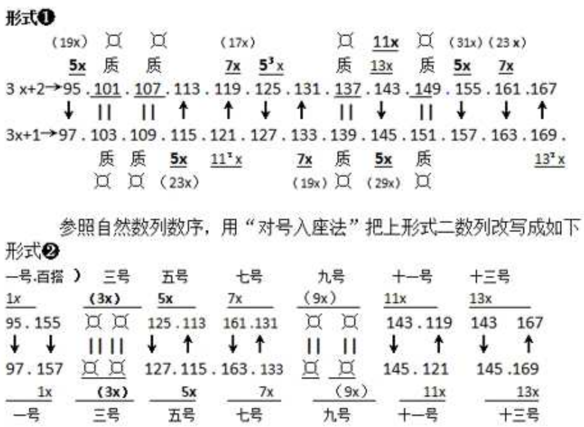
ISSN:2810-9651

有质因数 5；平均每七个数其中仍有一个数含有质因数 7；平均每十一个数其中仍有一个数含有质因数 11......

以上节所述为依据，任意在 3x+1 数列里取一个足够大的素数 pn，把 pn^2 的值作为 Q+2→3x+1 有穷数列的末项；pn^2-2 为“Q→3x+2”数列的末项，再在上述二数列末尾各取相互对应的 pn 个项的数作为一个区间单元。

【例】pn = 13 $pn^2=169$ Q+2→3x+1 数列末项 αn = pn^2 = 169

写成如下形式：



从上形式中可看出三号位和九号位本应属于 3^n 位置，由于“3x+1”和“3x+2”数列不存在 3 的倍数，而其它质数的倍数（合数）各自都有各自的位置。对比以上两种形式，形式 □ 孪生素数对子数与形式 □ 属于“3^n”位置数吻含。

【结论】在“3x+”同项相对的二数列里，平均 pn 个项数其中孪生素数的对子数“类同于”自然数列 pn 以内 3^n 中的指数 n（n ≧ 1）的值。由此可当作一个定律为“类同定律”。

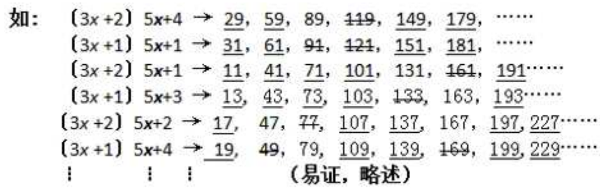
3. 依据“类同定律”推算给定数值以内孪生素数的对数

【例】求出素数 pn = 13 $pn^2=13^2=169$ 以内存在孪生素数的对数。

第一步：

求出 pn^2 以内 Q→“3x+2”和 Q+2→“3x+1”各数列的项数。

（注：二数列的项数是相同的，只要求出其中一数列的项数乘以 2 即可。）



【例】“3x+1”数列首项 α1=7，末项 αn=169，n=（169 一 1）÷ 6=28（项）

第二步：

①以平均 pn 个项作为一计算单元。

②以“类同定律”算出自然数列 pn 以内 3^n 的个数，（即 3^n 之中指数 n 的值，再乘以 2 为平均每一个计算单元内孪生素数的数量，设为 mp）。

【例】pn = 13 取自然数列 3 ~ 13 范围 3^n 的个数（3,9）2 个，一计算单元孪生素数的数量为 mp = 2 × 2 = 4

第三步：

把 pn^2 以内 Q→“3x+2”和 Q+2→“3x+1”各数列总项数以平均 pn 个项数作为一计算单元，求出可平均分成的计算单元数。

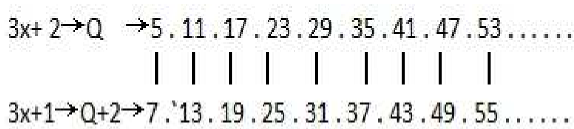
【例】28 ÷ 13=2（单元）……2

［注：①只取整数值，余数保留在数列起始端，另计算，易证<略>。②给定数 iP^2 值范围足够大，计算单元数较多时，可由大至小分级〔每级不少于二个计算单元〕，逐级缩小区间范围重复上述三步骤计算，由此可得较准确结果］。

第四步：

求出 pn^2 以内 Q→“3x+2”和 Q+2→“3x+1”二数列 pn^2 值范围属计算单元内（不含第三步除法项余数）孪生素数对的对数（设为 Mp）

【例】Mp = 2 × 2 × 2 = 8（对）



由于“3x+”二数列 pn^2 值范围孪生素数对的实际对数包含计算单元外余数项部分存在的孪生素数对，所以 169 以内 Mp ≧ 8（对）

【结论】综上所述，得出用于计算任何足够大的数值范围内孪生素数数量的通项公式：

$Mp \geqq mp \times [(pn^2-1) \div 6 \div pn]$

该公式以素数 pn 为基准，通过计算 pn^2 范围内“3x+2”

ISSN:2810-9651

与“3x+1”数列的项数，并结合自然数列中 3^n 的指数规律，量化估算孪生素数对的最小数量。其中，mp 反映单位计算单元内的孪生素数密度，而除法项则通过数列公差与素数分布的关联性进行修正，为孪生素数研究提供了可操作的数值工具。

4. 相关拓展

“类同定律”的适用范围远不止于“3x+”数列，它展现出强大的扩展性与普适性。在深入探索孪生素数分布规律的过程中，我们发现，将“类同定律”的思想迁移至其他类似数列同样行之有效。具体而言，在“3x+”数列的基础上，我们可以进一步构建“5x+”数列，即考虑形如“5χ+特定常数”的数列，其中 χ 为正整数。这样的数列同样能够捕捉到孪生素数在更大范围内的分布模式。同理，我们还可以在“5x+”数列的基础上，能够继续扩展至“7x+”数列，乃至更一般的“px+”数列（p 为素数），每一次扩展都意味着对孪生素数分布规律的更深入理解。关键在于，随着数列公差的改变（即从 3 变为 5，再变为 7 等），我们只需要相应地调整计算参数和方法，就能保持“类同定律”的有效性。这意味着，无论数值范围多么庞大，我们都能借助这一扩展后的理论框架，准确估算出该范围内孪生素数的对数，为孪生素数猜想的研究提供有力的数值支持。

参考文献：

[1] 周密 , 吕顺营 . 关于孪生素数的两个新发现 [J]. 中学数学 , 2021, (15): 80–81.

[2] 吴国胜 . 关于孪生素数猜想的证明 [J]. 数学学习与研究 , 2020, (23): 146–151.

[3] 有关孪生素数猜想的新突破 [J]. 语数外学习 (高中版中旬), 2020, (02): 66–67.

作者简介：傅国雄，出生年月 1954 年 5 月，学历中师，职称小学数学高级