教学教法研究 5 卷 5 期
ISSN:2810-9651

近年来关于广义伯努利方程研究述评

张绍梅[1] 周杨川[2*]
1 昭通市第一中学初中部 云南昭通 657000
2. 昭通学院物理与信息工程学院 云南昭通 657000

摘 要：对近年来发表的研究广义伯努利方程的文章进行述评，提出一些看法和建议，并对已有成果作出改进。

关键词：常微分方程；伯努利方程；伯努利－邓方程；广义伯努利方程；隐式解

2018 年，吴慧卓 等将如下形式的常微分方程称为广义伯努利方程，给出了该方程的隐式解公式并用于求解 Gompterz 模型和 Riccati 模型[1]：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)f(y)=Q(x)h(y)\ , \tag{1}$$

其中函数 f(y) 和 h(y) 满足条件：

$$f(y)=h(y)\int\frac{dy}{h(y)}\qquad(h(y)\neq 0)\ . \tag{2}$$

2024 年，高冬冬等根据文[1]所定义的广义伯努利方程的结构特点，自认为"猜想了在一定条件下的广义伯努利方程新的隐式解公式"，"理论证明了该隐式解的正确性"，"给出了相应的实例来验证理论结果的可行"[2].

实际上文[2]所作的主要工作在[1]中都已经做出．文[2]不过是把[1]中的 p(x) 改写为 R(x), 把[1]中的 R(y) 改写为 m(y)，除了[2]公式（9）中的指数函数的积分指数与[1]中公式相差一个负号外（该负号实为[1]的编校疏漏），并未得到比[1]更丰富更有用的成果，文[2]所谓应用实例在文[1]中也已给出。文[2]难脱抄袭篡改文[1]之嫌．

其实文[1]也并非新的工作．2017 年，Azevedo，D. 等于[3]中就将满足（2）式的方程（1）称为广义伯努利方程并给出了其通解（所用符号略有不同）；同年 Tisdell，C. C. 在文[4]中揭示了[3]所称广义伯努利方程与恰当微分方程的联系．

2020 年，郑军先生就文[1]所做工作，于[5]中介绍了邓淙先生 1985 年发表的文[6], 指出文[1]的结果本质上不过是文[6]的一个特例；并认为尽管几十年来广义伯努利方程得到较多关注和研究，但文献[6]结果的传播范围非常有限；强调和说明了邓淙先生的重要工作；对邓淙先生在文献[7]中提及的问题做出部分回答.

1985 年邓淙先生在[6]中提出如下定义的广义伯努利方程并给出了其隐式解公式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)f(y)+Q(x)g(y)\ , \tag{3}$$

其中函数 f(y) 和 g(y) 满足条件：

$$\acute{g}(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f(y)/g(y)\right]=\quad , \tag{4}$$

（α ≠ 0 为常数）.

在[1]和[3]中所定义的广义伯努利方程本质上为[6]所定义的广义伯努利方程当 α=1 时的特例．不但如此，熟知求导远较求积分容易，因此要验证具体的一个（1）形方程是否满足广义伯努利方程的条件，用（4）式较（2）式大为轻松容易．可见在已有文献[6]的基础上，[1–3] 所做的都是无用功，并未对常微分方程理论作出实质性的贡献．

有学者可能会认为 (4) 中"α ≠ 0 为常数"的说明是多余的．实际上，当 α=0 时，则 f(y)/g(y) 为常数（注意 g(y) 不能为 0，否则分式无意义），此时方程（3）为可分离变量方程．不必应用文[6]的知识求解，也不宜称其为广义伯努利方程．

自文[6]发表后，许多研究广义伯努利方程的文献给出的结果实际上都是文[6]的积分形式的表述或者特例．对此邓淙先生于 2002 年在[7]中作了讨论，并提出两个问题，其中之一是：如果作为 y 的函数的条件（4）的左侧（设为 h(y)）并非常数时，对于某些特殊形式的 h(y)，方程（3）是否可积?

郑军先生在文[5]中对此给出了一个回答，即文[5]中的定理 1.

于此之前，2017 年党兴菊等[8]先于文[5]给出了一个回答：即把条件（4）改进为下式：

$$g(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{f(y)}{g(y)}\right]=\acute{a}+\hat{a}\left[\frac{f(y)}{g(y)}\right], \tag{5}$$

其中 α，β 为实常数且不同时为0. 文[8]给出了满足（5）式条件的方程（1）的隐式解：当 β ≠ 0 时，

$$\frac{g(y)}{f(y)+\frac{\acute{a}}{\hat{a}}g(y)}=\mathrm{e}^{\int(\hat{a}P-\hat{a}Q)\mathrm{d}x}\left[C-\hat{a}\int P\,\mathrm{e}^{\int(\hat{a}Q-\hat{a}P)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right];$$

而当 β =0 时，即为[6]中所给出的：

$$\frac{f(y)}{g(y)}=\mathrm{e}^{\acute{a}\int P\mathrm{d}x}\left[C+\acute{a}\int Q\,\mathrm{e}^{-\acute{a}\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right].$$

式中 C 为任意常数 .

文[8]建议把满足条件（5）式的方程（3）称为伯努利－邓方程。

郑军先生[5]中的定理 1 由两部分组成，第一部分就是上述伯努利－邓方程中当 α =0 时的特例；第二部分说，如果方程（3）满足条件：

$$g(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{f(y)}{g(y)}\right]=\acute{a}\left[\frac{f(y)}{g(y)}\right]^{\mu},$$

式中 μ ≠ 0，1 为常数，并且满足

$$\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right]^{1-\mu}=\alpha A(1-\mu)\int Q(x)\mathrm{d}x+B, \tag{6}$$

式中 A，B 为常数，则方程 (3) 可积，且其隐式解为

$$\begin{cases}\dfrac{f(y)}{g(y)}=\dfrac{Q(x)}{P(x)}v,\\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{v^{1+\mu}+v^{\mu}-A}=\alpha\int P^{1-\mu}Q^{\mu}\mathrm{d}x+C,\end{cases}$$

其中 C 为任意常数 .

由于微分运算远较积分运算容易，因而如果把[5]中的条件（4）亦即本文中的（6）式改写为：

$$\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right]^{-\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right]=\alpha AQ(x)$$

式中 A 为常数 . 则记忆和应用就更为方便简洁。

将上述设想试应用于[3]中例（ii），求解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^{2}}{y}\left(1+\frac{x^{3}}{y^{2}}\right),$$

根据乘法对加法的分配律和加法交换律，令 P(x)=x5, Q(x)=x2, f(y)=y−3, g(y)=y−1, 把隐式解中的 v 改写为 u, 有：

$$g(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{f(y)}{g(y)}\right]=y^{-1}\left(-2y^{-3}\right)=(-2)\left[\frac{f(y)}{g(y)}\right]^{2},$$

可见 α =−2，μ =2，

$$\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right]^{-\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right]=\left(x^{-3}\right)^{-2}\left(-3x^{-4}\right)=(-2)\times\frac{3}{2}Q(x),$$

A=3/2，方程的解为

$$\begin{cases}y^{-2}=x^{-3}u,\\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{u^{3}+u^{2}-\frac{3}{2}u}=-2\int x^{-5}\cdot x^{4}\mathrm{d}x+C,\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^{-2}=x^{-3}u,\\ -\dfrac{2}{3}\ln|u|+\dfrac{\sqrt{7}+1}{3}\left(\ln\left|u+\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\right|\right)-\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}\ln\left|u-\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right|=-2\ln|x|+C,\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^{-2}=x^{-3}u,\\ 2\ln|u|-\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\ln\left|u+\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\right|\right)+\left(\sqrt{7}-1\right)\ln\left|u-\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right|=6\ln|x|-3C.\end{cases}$$

这里得到的解与[5]得到的解有所不同，是因为[5]中同样存在编校差错：其中最后一页第一行花括号内下方公式等式左侧被积分式的分母上漏了一项“1”，实际上应为 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{1+\frac{1}{v}-\frac{3}{2}v}$，其积分为：

$$-\frac{7+\sqrt{7}}{21}\left(\ln\left|v-\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right|\right)-\frac{7+\sqrt{7}}{21}\ln\left|v+\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right|,$$

从而正确的隐式解中 v 应表为：

$$-\frac{7+\sqrt{7}}{7}\left(\ln\left|v-\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right|\right)-\frac{7-\sqrt{7}}{7}\ln\left|v+\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right|=6\ln|x|+C_{1}.$$

考虑到本文中的 u 和[5]中的 v 互为倒数，易证两个隐式解存在互换关系。

早在 1985 年，陈省身先生就提出要让青年人知道有“好”的数学和“不好”的数学之分，从年轻时就懂得欣赏“好”的数学 . 我们认为，邓淙先生[6]在常微分方程研究领域树立了一个“好”的数学的光辉典范（数十年内国内外研究无出其右）；文[8]的作者继承了邓淙先生“好”的数学的优良传统；而郑军先生尽管重新发现了文[6]，给予其高度评价，并提出了新的成果，却未能深入领会文[6]“好”的数学的精髓，未能理解文[6]的言外之意和弦外之音；至于文[1]和[2]，

则在“不好”的数学方向越走越远，其根本原因是未能像文[3]的作者一样充分发掘已有的数学文献从而得到更有价值的新的成果，未能明了和区分数学的“好”与“坏”.

另外文[5]的参考文献列表中还存在几处编校差错：其中第 6、7、8 等 3 篇文献的作者实为常微分方程研究领域专家汤光宋教授，文中误植为汤光荣；第 8 篇文献的题名应为《常微分方程专题研究续论》，“微”误作“徽”，“续”误作“绪”，让人不知所云。希望相关编校人员能够加强责任心，尽力避免类似错误发生。

参考文献：

[1] 吴慧卓，李换琴，齐雪林 . 特定条件下广义伯努利方程的求解方法及其应用 [J]. 大学数学，2018，34（1）：96–99.

[2] 高冬冬 , 金红 . 一类广义伯努利方程的解法探讨 [J]. 高等数学研究，2024，27（3）：59–60.

[3] Azevedo D, Valentino MC. Generalization of the Bernoulli ODE[J]. Int J Math Educ Sci Technol.Forthcoming, 2017,48(2):256–324.

[4] Tisdell C C. Alternate solution to generalized Bernoulli equations via an integrating factor: an exact differential equation approach[J]. Int J Math Educ Sci Technol.Forthcoming, 2017，48（6）：913–971.

[5] 郑军 . 关于广义 Bernoulli 方程的注记 [J]. 大学数学，2020，36（4）：74–77.

[6] 邓淙 . Bernoulli 方程的推广 [J]. 昭通师专学报 (自然科学版),1985(1):21–25.

[7] 邓淙．关于 Bernoull 方程的推广 [J]．昭通师范高等专科学校学报，2002，24(5)：52–54．

[8] DANG XJ, LI XP, WU WL. Bernoulli–Deng Equation and Its General Integral[C]. in International Conference on Applied Mathematics, Modelling and Statistics Application: AMMSA 2017, Beijing, China, 21–22 May 2017. Curran Associates, Inc., 2017:294–296.

作者简介：张绍梅（1974–）, 女 , 云南昭阳区人，学士，中教一级，主要从事数学教育教学研究

通讯作者：周杨川（1981–）, 男 , 硕士，副教授，主要从事计算机教育教学和应用研究 .